

【補足】複素数を用いた微分方程式の解

振動問題に頻繁に現れる以下のような微分方程式を考えてみましょう。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu \frac{dx}{dt} - \omega^2 x \quad (1)$$

右辺のパラメータのうち、 $\mu = 0$ の場合、単純な \cos 関数で表現される振動となりますが、 $\omega = 0$ の場合、次のような減衰運動になります。

$$x = x_0 \cdot e^{-\mu t} \quad (2)$$

すなわち、(1)式の運動は、振動と減衰の両面を持つ運動であると考えられます。そこで、速度の初期値を 0、すなわち $dx/dt|_{x=0} = 0$ として単純化し、解を $x = x_0 e^{(\alpha + \beta j)t}$ と置くことにします。ここで j は虚数単位です。

まず、(2)式から、微分、2階微分を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (\alpha + \beta j)x_0 \cdot e^{(\alpha + \beta j)t} = (\alpha + \beta j)x \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= (\alpha + \beta j)^2 x_0 \cdot e^{(\alpha + \beta j)t} = (\alpha + \beta j)^2 x \end{aligned}$$

これらを(1)式に代入すると、 $(\alpha + \beta j)^2 x = -\mu(\alpha + \beta j)x - \omega^2 x$ となりますから、

$$\left. \begin{aligned} (\alpha + \beta j)^2 &= -\mu(\alpha + \beta j) - \omega^2 \\ \text{または } (\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta j &= -(\mu\alpha + \omega^2) - \mu\beta j \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 $\omega = 0$ のとき(3)式から、

$$\alpha + \beta j = -\mu \rightarrow \alpha = -\mu, \quad \beta = 0$$

とすることができます。したがって(2)式と同じ $x = x_0 \cdot e^{-\mu t}$ となります。

一方、 $\mu = 0$ の場合、

$$\begin{aligned} (\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta j &= -\omega^2 \\ \therefore \alpha\beta &= 0, \quad \alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2 \end{aligned}$$

したがって、 $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ となりますが、

$$\text{i) } \alpha = 0 \text{ のとき } -\beta^2 = -\omega^2 \rightarrow \beta = \pm\omega$$

$$\text{ii) } \beta = 0 \text{ のとき } \alpha^2 = -\omega^2 \rightarrow \alpha = \pm\omega j$$

いずれにしても、

$$x = x_0 e^{\pm\omega j} = x_0 (\cos \omega \pm j \sin \omega) \quad (4)$$

となります。

さて、(3)式に戻ると、

$$(\alpha^2 - \beta^2) = -(\mu\alpha + \omega^2) \quad (5)$$

$$2\alpha\beta = -\mu\beta \rightarrow \alpha = -\frac{\mu}{2} \quad (6)$$

上記(6)式を(5)式に代入して、

$$\beta^2 = \alpha^2 + \mu\alpha + \omega^2 = \frac{\mu^2}{4} - \frac{\mu^2}{2} + \omega^2 = \omega^2 - \frac{\mu^2}{4} = \frac{4\omega^2 - \mu^2}{4} \therefore \beta = \frac{\pm\sqrt{4\omega^2 - \mu^2}}{2}$$

以上から、

$$x = x_0 e^{\frac{-\mu \pm j\sqrt{4\omega^2 - \mu^2}}{2}t} \quad (7)$$

とすることができます。ここで(7)式の指数部分について、 $\omega = 0$ のとき、

$$\frac{-\mu \pm j\sqrt{-\mu^2}}{2} = \frac{-\mu \pm (-1) \times \sqrt{\mu^2}}{2} = \frac{-\mu \pm (-1) \times \mu}{2}$$

となります。符号±のうち+のとき $-\mu$ となり、(2)式と一致しますが、-のとき 0 となり(2)式と矛盾することになります。そこで、符号±のうち+のみを採用することにします。すなわち、以下のような式になります。

$$x = x_0 e^{\frac{-\mu + j\sqrt{4\omega^2 - \mu^2}}{2}t} \quad (8)$$

【式の解釈】

i) $2\omega > \mu$ のとき、

$$\begin{aligned} x &= x_0 e^{\frac{-\mu + j\sqrt{4\omega^2 - \mu^2}}{2}t} = x_0 e^{\frac{-\mu t}{2}} e^{j\frac{\sqrt{4\omega^2 - \mu^2}}{2}t} \\ &= x_0 e^{\frac{-\mu t}{2}} e^{j\frac{\sqrt{4\omega^2 - \mu^2}}{2}t} = x_0 e^{\frac{-\mu t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{4\omega^2 - \mu^2}}{2}t + j \sin \frac{\sqrt{4\omega^2 - \mu^2}}{2}t \right) \end{aligned}$$

したがって、振動するが徐々に減衰するような運動になります。

ii) $2\omega \leq \mu$ のとき、指数部分は、

$$\frac{-\mu + j\sqrt{4\omega^2 - \mu^2}}{2} \cdot t = \frac{-\mu + j^2 \cdot \sqrt{\mu^2 - 4\omega^2}}{2} \cdot t = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\omega^2}}{2}t$$

となり、虚数部がなくなります。したがって、 $x = x_0 e^{\frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\omega^2}}{2}t}$ となりますので、振動しないで減衰するような運動になります。ちなみに $\omega = 0$ のとき、 $x = x_0 e^{-\mu t}$ となり、(2)式と同じになります。