1.3　誤　差

数値解析では，誤差の問題が大きな鍵になります。そこで，誤差の問題について整理しておきます。

（1）なぜ誤差が問題となるのか？

数値解析では，次のような理由から誤差の問題が大きな鍵となります。

(a) 数値解では，解を求めるために仮定や近似を行うので，厳密な解の値を求めることはほぼできない。

(b) コンピュータの実数は有限の桁で表現した近似値である。

(c) 演算する前に近似された値（例えばπ）を用いている。

(d) 物理的な数式モデルでも近似が行われている。

したがって，有用な解を得るためには，以下の点について明白にしておく必要があります。

■いつ近似がなされたか？

■近似が解に及ぼす影響はどの程度か？

■誤差の発生

数値解析で誤差が発生するのは，以下のような箇所です。

(a) 数学モデルを作るために単純化せざるをえないとき
　［例］　実際の気体の摩擦抵抗をシミュレーションする際，式中の相関関係で理想気体の法則を使う。

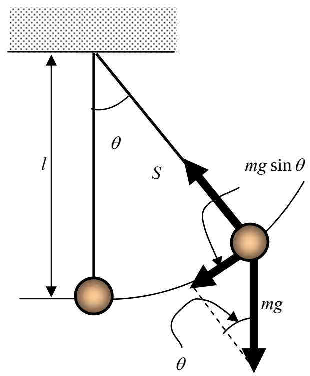
(b) 測定装置の限界によるデータの誤差

(c) 数学モデルの解を求める際の近似

ここでは，上記(b),(c)を取り扱います。

■解析解でも近似することが多い

解析的に問題を解く際にも，近似することがよくあります。たとえば，次のような振り子の問題を取り上げてみましょう。



$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\theta$$

図 1-4　振り子問題

この問題を解く際，通常，θ が小さいものと仮定して，

$$\theta \cong \sin\theta \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

これを解いて $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \beta)$ ，ここで　$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$

とするのが通常です。この仮定を入れない場合，

$$\frac{d\theta}{dt} = v \quad \text{とおいて，} \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

とし，差分近似すると

$$\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\Delta t} = v_i, \quad \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} = -\frac{g}{l}\sin\theta_i$$

すなわち，

$$\theta_{i+1} = \theta_i + v_i \Delta t$$

$$v_{i+1} = v_i - \frac{g}{l}\Delta t \cdot \sin\theta_i$$

となります。この差分式を，たとえば図 1-5 に示すように Excel で式定義することにより，数値的に解くことができます。

　グラフ化すると，図 1-6 に示すように θ_0 の違いにより解析結果がかけ離れてきます。すなわち，初期値 θ が大きいと $\theta \cong \sin\theta$ とする仮定は成り立たないことになります。

　このように問題によっては，元々の式が前提とする仮定を見直す必要も出てきますので，注意が必要です。

	A	B	C	D	E	F	G
1	Δt	θ0(Degree)	θ0(Radian)	t	V	θ	θ'=w･cos(t)
2	0.1	60	=B2*PI()/180	0	0	=C2	=$C$2*COS(D2)
3				=$A$2+D2	=E2-$A$2*SIN(F2)	=F2+$A$2*E3	=$C$2*COS(D3)
4				=$A$2+D3	=E3-$A$2*SIN(F3)	=F3+$A$2*E4	=$C$2*COS(D4)
5				=$A$2+D4	=E4-$A$2*SIN(F4)	=F4+$A$2*E5	=$C$2*COS(D5)
6				=$A$2+D5	=E5-$A$2*SIN(F5)	=F5+$A$2*E6	=$C$2*COS(D6)
7				=$A$2+D6	=E6-$A$2*SIN(F6)	=F6+$A$2*E7	=$C$2*COS(D7)
8				=$A$2+D7	=E7-$A$2*SIN(F7)	=F7+$A$2*E8	=$C$2*COS(D8)
9				=$A$2+D8	=E8-$A$2*SIN(F8)	=F8+$A$2*E9	=$C$2*COS(D9)
10				=$A$2+D9	=E9-$A$2*SIN(F9)	=F9+$A$2*E10	=$C$2*COS(D10)
11				=$A$2+D10	=E10-$A$2*SIN(F10)	=F10+$A$2*E11	=$C$2*COS(D11)
12				=$A$2+D11	=E11-$A$2*SIN(F11)	=F11+$A$2*E12	=$C$2*COS(D12)

図 1-5　振り子問題の Excel での定義

$\theta_0 = 10°$　　　　$\theta_0 = 30°$

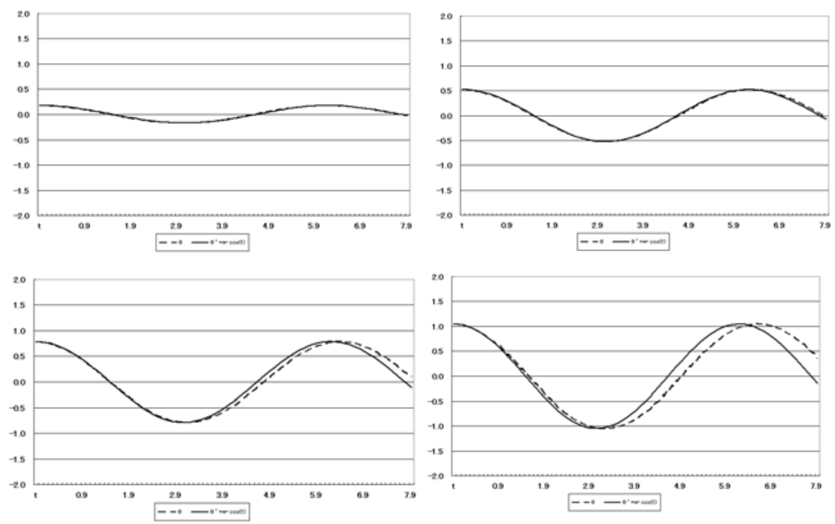


図 1-6　θ の大きさによる解析結果の違い