

6.1

要素分割

(1) **三角形要素** 1次元有限要素法と同様、2次元有限要素法でも解析対象の物体を**要素分割**（メッシュ分割ともいう）します。要素の形状は、分割された要素の境界の代表となる点（**節点**という）を連結した形で表現します。つまり、要素形状は多角形として表現されます。本書では、多角形の中で最も単純な三角形の要素を扱うことにします。

(2) **変位の近似** 2次元弾性問題では、合計8個の未知数がありますが、通常、有限要素法では変位を未知数として選択します。つまり、剛性行列中の変量と力を既知量とし、変位成分 u_x , u_y を未知数とします。2次元問題ですので、これらは座標 x , y の関数となります。1次元問題と同様、以下のように1次関数として近似します。

$$u_x(x, y) = Ax + By + C \quad (6.1)$$

1次元問題において要素内変位を直線で近似したことに対応して、2次元では平面で近似します。物体全体で見ると、いわば折れ線近似ならず**折れ面近似**ともいえましょう。また、平面は3点が決めれば、それらを通る平面はただ1つ定まります。したがって、要素形状として三角形を選ぶのが便利です。それぞれの要素内部の変位 u_x , u_y は、節点での変位を通る平面上の座標の1次関数として近似します。このような要素を**三角形1次要素**といいます。もちろん、2次式や3次式で近似してもかまいませんが、式導出は、より複雑になります。

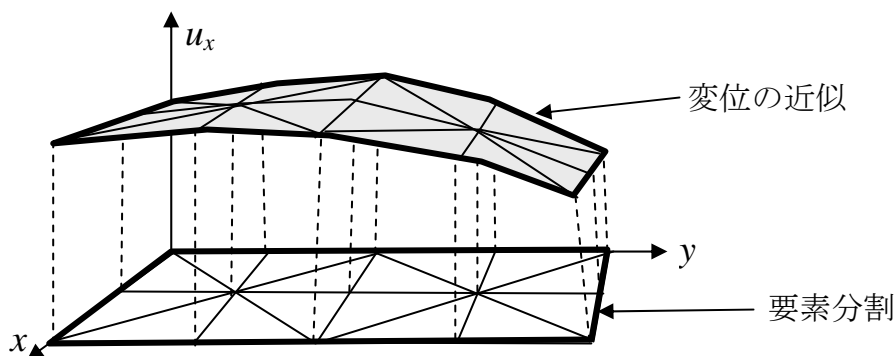


図 6-1 平面による変位の近似

6.1 要素分割

式(6.9)～式(6.11)を使って，変位の偏微分は以下のように計算できます。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta} (a_i u_{x_i} + a_j u_{x_j} + a_k u_{x_k}) \\ \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial y} &= \frac{1}{\Delta} (b_i u_{y_i} + b_j u_{y_j} + b_k u_{y_k}) \\ \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial y} &= \frac{1}{\Delta} (b_i u_{x_i} + b_j u_{x_j} + b_k u_{x_k}) \\ \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta} (a_i u_{y_i} + a_j u_{y_j} + a_k u_{y_k}) \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

これらを式(6.14)に代入してマトリックス表示すると

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_k & 0 \\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_k \\ b_i & a_i & b_j & a_j & b_k & a_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x_i} \\ u_{y_i} \\ u_{x_j} \\ u_{y_j} \\ u_{x_k} \\ u_{y_k} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

式(6.16)中の係数マトリックスを $[B]$ (**B マトリックス**という) で表現すると，

$$[\varepsilon] = [B][u]^{(e)} \quad (6.17)$$

となります。式(6.6)と式(6.16)から分かるように，**B** マトリックスの成分は，要素を構成する節点座標値だけから得られる値です。したがって，**B** マトリックスは要素ごとに一定となります。ひずみ成分も節点変位との積で計算されますから，要素内ひずみも一定です。このため，三角形 1 次要素を **定ひずみ要素**ともいいます。

応力は，応力-ひずみ関係式

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] \quad (6.18)$$

で求めることができます (式(5.28)再掲)。この式に式(6.18)を代入すると，

$$[\sigma] = [D][B][u]^{(e)} \quad (6.19)$$

となります。応力-ひずみマトリックスもヤング率とポアソン比から与えられる定数マトリックスですから，応力も要素内で一定の値になります。