お客様のご要望にお答えして

複素数関数の式証明

白井　豊　著

目　次

拙著「Excel と VBA による実用数値解析入門」，「Visual C#.Net によるアルゴリズムとデータ構造」では，非線型方程式におけるミュラーの方法等で必要な複素数の平方根を求める方法を提示していますが，「大学等の複素数論等のテキストではなじみがないので，証明等について示して欲しい」との要望が読者からありました。

ミュラーの方法に代表されるように数値解析の現場では，複素数を使った各種の関数を用いることが多いのですが，複数の複素数論のテキストを参照してみましたが，確かにテーマとして取り上げていないようようです。そこで，読者からの要望にそって，本小冊子を作成しましたので，ぜひご活用ください。

2011 年 1 月吉日　白井　豊

１．複素数関数の一般的な求め方

単純に計算できる場合，特に工夫する必要はありませんが，一般に複素数の関数値を求めるには，$f(a+bj)=A+Bj$ とおいて，以下のように求めます。

① A，B を a，b で表現する。
② A を a，b で表現して，B を A，a，b で表現する。
③ B を a，b で表現して，A を B，a，b で表現する。

２．複素数の逆数

複素数の逆数は，単純に計算することができます。

$$\frac{1}{a+bj}=\frac{a-bj}{(a+bj)(a-bj)}=\frac{a-bj}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{bj}{a^2+b^2}$$

３．複素数の平方根

まず，$\sqrt{a+bj}=A+Bj$ とおくと，$(A+Bj)^2=(A^2-B^2)+2ABj=a+bj$ ですから，以下のように式展開することができます。

$$a=A^2-B^2,\quad b=2AB\to B=\frac{b}{2A}$$

$$a=A^2-\frac{b^2}{4A^2}\to 4A^4-4aA^2-b^2=0$$

$$A^2=\frac{4a\pm\sqrt{16a^2+16b^2}}{8}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

ここで $A^2>0, \sqrt{a^2+b^2}>|a|$ ですから，a の符号に関わらず，±のうち＋だけが有効になります。

$$A^2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\to A=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

虚数部 B は，以下のようになります。

$$B=\frac{b}{2A}=\frac{b}{2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}}=\frac{b\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}\cdot\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}$$

$$=\frac{b\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}{\sqrt{2}\sqrt{(a^2+b^2)-a^2}}=\frac{b\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}{\sqrt{2}b}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

4．複素数の対数

まず，$\log(a+bj)=A+Bj$ とおくと，$a+bj=e^{A}(\cos B+j\sin B)$ ですから，

$$a=e^{A}\cos B,\quad b=e^{A}\sin B \quad \therefore a^2+b^2=e^{2A}\to A=\frac{1}{2}\log\left(a^2+b^2\right)$$

さらに虚数部は，$\sin B=\dfrac{b}{e^{A}}\to B=\mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{b}{e^{A}}\right)$ として求めることができます。

5．虚数の三角関数

虚数の対数の公式から, $e^{\theta j}=\cos\theta+j\sin\theta$ ですから,

$$\theta=\ bj \quad \text{とおいて，}\quad e^{-b}=\cos(bj)+j\sin(bj)$$

, $$\theta=-bj \quad \text{とおいて，}\quad e^{b}=\cos(bj)-j\sin(bj)$$

となりますので，以下のように双曲線 sin，双曲線 cos，双曲線 tan で表現できます。

$$\cos(bj)=\frac{e^{b}+e^{-b}}{2}\quad (=\cosh b)$$

$$\sin(bj)=\frac{-e^{b}+e^{-b}}{2j}=j\cdot\frac{e^{b}-e^{-b}}{2}\quad (=j\cdot\sinh b)$$

$$\tan(bj)=\frac{\sin(bj)}{\cos(bj)}=\frac{j\cdot\dfrac{e^{b}-e^{-b}}{2}}{\dfrac{e^{b}+e^{-b}}{2}}=j\cdot\frac{e^{b}-e^{-b}}{e^{b}+e^{-b}}\quad (=j\cdot\tanh b)$$

【虚数の三角関数のテーラ展開による確認（Cos）】

指数のテーラ展開は，以下のようになります。

$$e^{x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots,\quad e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$\therefore \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

虚数のテーラ展開を整理すると，以下のように上記級数と同じになります。

$$\cos(xj)=1-\frac{(xj)^2}{2!}+\frac{(xj)^4}{4!}-\frac{(xj)^6}{6!}+\cdots=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

sin や tan についても同様に確認できますので, ご自身で確認してみましょう。

６．複素数の三角関数

(1)基本的な三角関数

加法定理から，以下のように単純に計算できます。

$$\sin(a+bj)=\sin a\cos(bj)+\cos a\sin(bj)=\sin a\cosh b+j\cdot\cos a\sinh b$$

$$\cos(a+bj)=\cos a\cos(bj)-\sin a\sin(bj)=\cos a\cosh b-j\cdot\sin a\sinh b$$

$$\tan(a+bj)=\frac{\tan a+\tan(jb)}{1-\tan a\tan(jb)}=\frac{\tan a+j\tanh b}{1-j\tan a\tanh b}$$

$$=\frac{(\tan a+j\tanh b)(1+j\tan a\tanh b)}{(1-j\tan a\tanh b)(1+j\tan a\tanh b)}=\frac{\tan a(1-\tanh^2 b)+j\tanh b\cdot(\tan^2 a+1)}{1+\tan^2 a\tan^2 b}$$

$$=\frac{\tan a\cdot(1-\tanh^2 b)}{1+\tan^2 a\tan^2 b}+j\cdot\frac{\tanh b\cdot(\tan^2 a+1)}{1+\tan^2 a\tan^2 b}$$

(2)逆関数

【Tan^{-1}】まず, $\mathrm{Tan}^{-1}(a+bj)=A+Bj$とおくと,

$$a+bj=\tan(A+Bj)=\frac{\tan A+j\tanh B}{1-j\tan A\tanh B}$$

$$(a+bj)(1-j\tan A\tanh B)=\tan A+j\tanh B$$

$$(a+b\tan A\tanh B)+j(b-a\tan A\tanh B)=\tan A+j\tanh B$$

したがって，$\tan A=a+b\tan A\tanh B$

$$\tanh B=b-a\tan A\tanh B\rightarrow\tanh B=\frac{b}{1+a\tan A}$$

$$\tan A=a+b\tan A\cdot\frac{b}{1+a\tan A}$$

$$\therefore a\tan^2 A-(a^2+b^2-1)\tan A-a=0$$

$\tan A$ について解けば，以下のようになります。

$$\tan A=\frac{(a^2+b^2-1)\pm\sqrt{(a^2+b^2-1)^2+4a^2}}{2a}$$

上式で $b=0$ ，すなわち実数の場合 $\tan A=((a^2-1)\pm(a^2+1))/2a$ となります。右辺の±において，＋のとき $\tan A=a$ と定義どおりですが，－のとき $\tan A=-1/a$ となり矛盾します。そこで，±のうち＋だけを採用します。したがって，

$$\tan A=\frac{(a^2+b^2-1)+\sqrt{(a^2+b^2-1)^2+4a^2}}{2a}$$

なお，$a=0$ のとき $\tan^{-1}(bj)=j\tan b$ ですので，$\tan A=0 \to A=0$ となります。一方，

$$\frac{b}{1+a\tan A}=\tanh B=\frac{e^B-e^{-B}}{e^B+e^{-B}}=\frac{e^B-1/e^B}{e^B+1/e^B}=\frac{e^{2B}-1}{e^{2B}+1}$$

$$b(e^{2B}+1)=(1+a\tan A)(e^{2B}-1)$$

$$be^{2B}+b=e^{2B}-1+a\tan A\cdot e^{2B}-a\tan A$$

$$a\tan A+b+1=(a\tan A-b+1)e^{2B} \to e^{2B}=\frac{a\tan A+b+1}{a\tan A-b+1}$$

$$B=\frac{1}{2}\log\left(\frac{a\tan A+b+1}{a\tan A-b+1}\right)$$

なお, $a\tan A-b+1=0$ のとき$B=\infty$, $a\tan A+b+1=0$のとき$B=-\infty$となります。以上を整理して以下のようになります。

$$\mathrm{Tan}^{-1}(a+bj)=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{(a^2+b^2-1)+\sqrt{(a^2+b^2-1)^2+4a^2}}{2a}\right)$$
$$+j\cdot\frac{1}{2}\log\left(\frac{a\tan A+b+1}{a\tan A-b+1}\right)$$

【Sin^{-1}】まず，$\mathrm{Sin}^{-1}(a+bj)=A+Bj$ とおくと，

$$a+bj=\sin(A+Bj)=\sin A\cosh B+j\cos A\sinh B$$

$$\therefore a=\sin A\cosh B=\sin A\left(\frac{e^B+e^{-B}}{2}\right) \qquad ①$$

$$b=\cos A\sinh B=\cos A\left(\frac{e^B-e^{-B}}{2}\right) \qquad ②$$

ですから，$$\frac{2a\cdot e^B}{\sin A}=e^{2B}+1 \qquad ③$$

$$\frac{2b\cdot e^B}{\cos A}=e^{2B}-1 \qquad ④$$

③－④から，

$$\frac{2a\cdot e^B}{\sin A}-\frac{2b\cdot e^B}{\cos A}=2 \to e^B\left(\frac{a}{\sin A}-\frac{b}{\cos A}\right)=1$$

$$\therefore e^B=\frac{\sin A\cos A}{a\cos A-b\sin A} \qquad ⑤$$

⑤を③に代入して

$$2a\left(\frac{\sin A\cos A}{\sin A(a\cos A-b\sin A)}\right)=\frac{\sin^2 A\cos^2 A}{(a\cos A-b\sin A)^2}+1$$

$$2a\cos A(a\cos A-b\sin A)=\sin^2 A\cos^2 A+(a\cos A-b\sin A)^2$$

$$\therefore 2a^2\cos^2 A-2ab\sin A\cos A$$

$$=\sin^2 A\cos^2 A+a^2\cos^2 A+b^2\sin^2 A-2ab\sin A\cos A$$

整理して $a^2\cos^2 A-\sin^2 A\cos^2 A-b^2\sin^2 A=0$

さらに，$a^2(1-\sin^2 A)-\sin^2 A(1-\sin^2 A)-b^2\sin^2 A=0$ ですから，

$$\sin^4 A-(a^2+b^2+1)\sin^2 A+a^2=0$$

したがって，$\sin^2 A=\dfrac{(a^2+b^2+1)\pm\sqrt{(a^2+b^2+1)^2-4a^2}}{2}$ ⑥

ここで，b＝0，すなわち実数のとき，以下のようになります。

$$\sin^2 A=\frac{(a^2+1)\pm\sqrt{(a^2+1)^2-4a^2}}{2}=\frac{(a^2+1)\pm(a^2-1)}{2}$$

ここで，最右辺の±のうち－を採用すると $\sin^2 A=2/2=1$，すなわち A の値に関わらず定数となり矛盾します。一方，＋のとき，

$$\sin^2 A=\frac{2a^2}{2}=a^2$$

と定義どおりとなりますので，＋を採用します。すなわち，

$$\sin^2 A=\frac{(a^2+b^2+1)+\sqrt{(a^2+b^2+1)^2-4a^2}}{2}$$

$$\therefore \sin A=\pm\sqrt{\frac{(a^2+b^2+1)+\sqrt{(a^2+b^2+1)^2-4a^2}}{2}}$$

$$A=\pm\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{\frac{(a^2+b^2+1)+\sqrt{(a^2+b^2+1)^2-4a^2}}{2}} \qquad ⑦$$

式⑦の符号は，実数における sin 関数の正負から, $a>0$ のときプラス（＋），$a<0$ のときマイナス（－）とします。

虚数部，すなわち B は，式⑤から求めます。

$$B=\log\frac{\sin A\cos A}{a\cos A-b\sin A}$$

なお，b＝0 のとき，a＝sin A ですから，

$$B=\log\frac{\sin A\cos A}{\sin A\cos A}=\log 1=0$$

となります。

【Cos^{-1}】まず，$\mathrm{Cos}^{-1}(a+bj)=A+Bj$とおくと，

$$a+bj=\cos(A+Bj)=\cos A\cosh B-j\sin A\sinh B$$

$$\therefore a=\cos A\cosh B=\cos A\left(\frac{e^{B}+e^{-B}}{2}\right) \quad ①$$

$$b=-\sin A\sinh B=-\sin A\left(\frac{e^{B}-e^{-B}}{2}\right) \quad ②$$

ですから，

$$\frac{2a\cdot e^{B}}{\cos A}=e^{2B}+1 \quad ③$$

$$-\frac{2b\cdot e^{B}}{\sin A}=e^{2B}-1 \quad ④$$

式③－式④として

$$\frac{2a\cdot e^{B}}{\cos A}+\frac{2b\cdot e^{B}}{\sin A}=2\rightarrow e^{B}\left(\frac{a}{\cos A}+\frac{b}{\sin A}\right)=1$$

$$\therefore e^{B}=\frac{\sin A\cos A}{a\sin A+b\cos A} \quad ⑤$$

式⑤を式③に代入して，

$$2a\left(\frac{\sin A\cos A}{\cos A(a\sin A+b\cos A)}\right)=\frac{\sin^{2}A\cos^{2}A}{(a\sin A+b\cos A)^{2}}+1$$

$$2a\sin A(a\sin A+b\cos A)=\sin^{2}A\cos^{2}A+(a\sin A+b\cos A)^{2}$$

$$\therefore 2a^{2}\sin^{2}A+2ab\sin A\cos A$$

$$=\sin^{2}A\cos^{2}A+a^{2}\sin^{2}A+b^{2}\cos^{2}A+2ab\sin A\cos A$$

整理して，$a^{2}\sin^{2}A-\sin^{2}A\cos^{2}A-b^{2}\cos^{2}A=0$

さらに，$a^{2}(1-\cos^{2}A)-(1-\cos^{2}A)\cos^{2}A-b^{2}\cos^{2}A=0$ から，

$$\cos^4 A-(a^2+b^2+1)\cos^2 A+a^2=0$$

とすることができる。 $\cos^2 A$ について解いて,

$$\cos^2 A=\frac{(a^2+b^2+1)\pm\sqrt{(a^2+b^2+1)^2-4a^2}}{2}$$

ここで $b=0$ のとき

$$\cos^2 A=\frac{(a^2+1)\pm\sqrt{(a^2+1)^2-4a^2}}{2}=\frac{(a^2+1)\pm(a^2-1)}{2}$$

上式の最右辺の±でマイナス(−)のとき, $\cos^2 A=2/2=1$ となり, A の値に関わらず定数となるので矛盾します。プラス(+)のとき $\cos^2 A=2a^2/2=a^2$ と定義どおりとなるので,プラスを採用します。すなわち,

$$\cos^2 A=\frac{\left(a^2+b^2+1\right)+\sqrt{\left(a^2+b^2+1\right)^2-4a^2}}{2} \qquad ⑤$$

実数における cos 関数の正負から,まず,

$$A'=\mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{\frac{(a^2+b^2+1)+\sqrt{(a^2+b^2+1)^2-4a^2}}{2}}$$

を計算し, $a\geqq 0$ のとき, $A=A'$, $a<0$ のとき $A=\pi-A'$ とします。虚数部 B は式⑤から計算します。すなわち,

$$B=\log\frac{\sin A\cos A}{a\sin A+b\cos A}$$

なお, $b=0$ のとき, $a=\cos A$ ですから,

$$B=\log\frac{\sin A\cos A}{\cos A\sin A}=\log 1=0$$

となります。